Μαθημα 1ο 1/3/2017

Τοπολογια

Τεταρτη αιθουσα : 012 , περιττοι $10^{00}-12^{00}$

Παρασκευη αιθουσα : 012 , αρτιοι $12^{00}-14^{00}$

Ορισμός:

Εστω $E \neq \emptyset$ [τυχαιο συνολο] και $\rho : E \times E \to \mathbb{R}$ συναρτηση με τις ιδιοτητες:

i) $\underbrace{\rho(x,y)}_{\text{αποσταση}} = 0 \iff x = y$ $\quad (x \neq y,\ \rho(x,y) \overset{>0}{\neq} 0)$

ii) $\rho(x,y) = \rho(y,x) \quad \forall\, x,y \in E$

iii) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) \quad \forall\, x,y,z \in E$

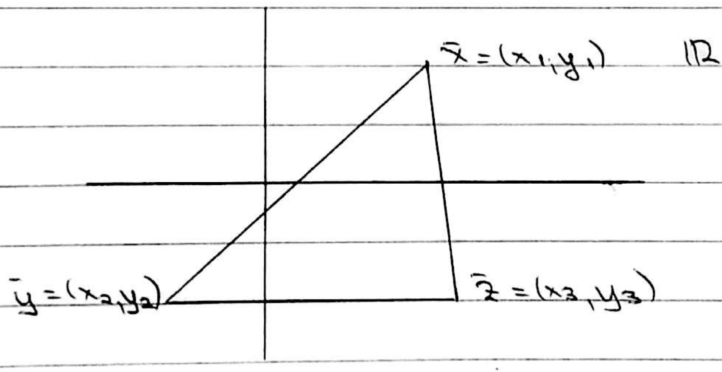
↳ τριγωνικη ανισοτητα

Π.χ

$E = \mathbb{R}^2 \qquad \rho : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\rho(\bar{x},\bar{y}) = \sqrt{(x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2}$

$(\mathbb{R}^2, \rho)$ ειναι μετρικος χωρος (η αποσταση)



Παρατηρηση:

(E,ρ) μετρικος χωρος

$\rho(x,y) \leq \rho(x,z_1) + \rho(z_1,z_2) + \dots + \rho(z_{n-1},z_n) = \rho(z_n,y)$

$\forall\, x,y \quad \forall\, \underbrace{z_1,\dots,z_n}_{n \in \mathbb{N}} \in E$

Θ.α.ο $\forall x,y \in E$: $\rho(x,y) \geq 0$

$\rho(x,x) \leq \rho(x,y) + \rho(y,x)$

$0 \leq 2\rho(x,y) \Rightarrow \rho(x,y) \geq 0$

<u>Προτασηη 1</u>

(E,ρ) μετρικος χωρος

$A = |\rho(x,y) - \rho(z,w)| \leq \rho(x,z) + \rho(y,w)$

1η $A = \rho(x,y) - \rho(z,w) \overset{?}{\leq} \rho(x,z) + \rho(y,w) \Leftrightarrow$

$\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,w) + \rho(w,y)$

2η $A = \rho(z,w) - \rho(x,y)$

ΑΣΚΗΣΗ

$|\rho(x,z) - \rho(y,z)| \leq \rho(x,y)$, $x,y,z \in E$

(E,ρ) μετρικος χωρος

<u>Ιδιοτητες μετρικου χωρου με νορμα</u>

i) $\|\bar{x}\| \geq 0 \iff \bar{x} = 0$

ii) $\|\lambda \bar{x}\| = |\lambda| \cdot \|\bar{x}\|$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \bar{x} \in E$

iii) $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ $\forall \bar{x}, \bar{y} \in E$

- Μπορουμε να κατασκευασουμε απο την νορμα $\|\cdot\|$, μια μετρικη στο (E,ρ)

$\rho : E \times E \to \mathbb{R}$, E διανυσματικος χωρος

$\rho(\bar{x},\bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\|$

Ζητουμενο (E,ρ) οντως μετρικος χωρος

i) $\rho(\bar{x},\bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \|\bar{x} - \bar{y}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} - \bar{y} = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$

ομοια (ii) και (iii)

$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots, \mathbb{R}^n$ νορμες

$\|\bar{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$

$N_1(\bar{x}) = \max\{|x_i| \quad i = 1, 2, \ldots, n\}$

$N_2(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

<u>Διακριτή μετρική</u>

τυχαίο $E \neq \emptyset$, $\rho : E \times E \to \mathbb{R}$

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0 & , x = y \\ 1 & , x \neq y \end{cases}$$

τοτε ο (E, ρ) ειναι μετρικος χωρος

i) $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii) $\rho(x,y) = \rho(y,x) \quad \forall x, y \in E$

iii) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) \quad \forall x, y, z \in E$

(*) αν $x \neq y$ τοτε $\rho(x,y) = 1$

• Δινονται οι μετρικοι χωροι $(E_1, \rho_1), \ldots, (E_n, \rho_n)$, $n \in \mathbb{N}$
(E, ρ) , ρ. Εστω $\bar{x}, \bar{y} \in E$ οριζουμε την καρτεσιανη μετρικη ως εξης: $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$

$\bar{y} = (y_1, \ldots, y_n)$

$E = E_1 \times \ldots \times E_n$

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$

αρα $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{[\rho_1(x_1,y_1)]^2 + \ldots + [\rho_n(x_n,y_n)]^2}$

ο (E, ρ) μετρικος χωρος

i) $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$

$\Updownarrow$ $\qquad\qquad$ $\Updownarrow$

$\sum \rho_i^2 (x_i, y_i) = 0 \qquad x_i = y_i \quad \forall i$

$\Updownarrow$

$\rho_i(x_i, y_i) = 0 \quad \forall i$

$\Updownarrow$

ii) $\rho(\bar{x},\bar{y}) = \rho(\bar{y},\bar{x})$ ευκολο!

iii) $\rho(\bar{x},\bar{y}) \le \rho(\bar{x},\bar{z}) + \rho(\bar{z},\bar{y}) \Leftrightarrow$

$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$

$\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$

$\bar{z} = (z_1, \dots, z_n)$

$$\sqrt{\sum \underbrace{\rho_i^2(x_i,y_i)}_{a_i}} \le \sqrt{\sum \underbrace{\rho_i^2(x_i,z_i)}_{b_i}} + \sqrt{\sum \underbrace{\rho_i^2(z_i,y_i)}_{c_i}} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2} \Leftrightarrow a_i \le b_i + c_i \quad (5)$$

$\forall i = 1, \dots, n$
$\forall \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2} \quad (1)$$

Εσωτερικο γινομενο

$\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$\bar{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$

$(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i = \|\bar{\lambda}\| \cdot \|\bar{\mu}\| \cdot \cos(\hat{\bar{\lambda}, \bar{\mu}})$

$\lambda_i = b_i$
$\mu_i = c_i$
$$\overset{(1)}{\Rightarrow} 2\sum_{i=1}^{n} b_i c_i \le 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}$$

$$\Rightarrow \sum b_i^2 + \sum c_i^2 + 2\sum b_i c_i \le \sum b_i^2 + \sum c_i^2 + 2\sqrt{\sum b_i^2} \cdot \sqrt{\sum c_i^2} \Rightarrow$$

$$\sum_i (b_i + c_i)^2 \le \left(\sqrt{\sum b_i^2} + \sqrt{\sum c_i^2}\right)^2 \quad \forall b_i, c_i \quad (3)$$

Απο (3), (5) $\Rightarrow$ (4)

• $(E_1, \rho_1), \ldots, (E_n, \rho_n)$ μια άλλη μετρική σχέση είναι

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\rho_1^2(x_1, y_1) + \ldots + \rho_n^2(x_n, y_n)}$$

$E = E_1 \times \ldots \times E_n$

$\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \max\{\rho_i(x_i, y_i), \ i = 1, \ldots, n\}$

$\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$

$\bar{y} = (y_1, \ldots, y_n)$

• Μια άλλη μετρική $\rho''(\bar{x}, \bar{y}) = \sum \rho_i (x_i, y_i)$

$(\mathbb{R}, \rho_\delta)$, $\rho_\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$

$\exists \ \|\cdot\| \quad \rho_\delta(x, y) = \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

$\rho_\delta(x, 0) = \|x\| \quad \forall \lambda$

$\rho_\delta(\lambda x, 0) = \|\lambda x\|$

→ $E = \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |x - y|$, $\rho_\delta(x, y)$ $\Big\}$ <u>ΔΕΝ</u> είναι συγκρίσιμες

$\nexists \ c > 0 : \underbrace{\rho(x, y)}_{|x-y|} \leq \rho_\delta(x, y) \leq c \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Πρόταση

(E_i, ρ_i), $i=1,\dots,n$ $\quad \exists\, \rho, \rho', \rho''$

- $\rho'(\bar{x},\bar{y}) \le \rho(\bar{x},\bar{y}) \le \sqrt{n}\, \rho'(\bar{x},\bar{y})$
- $\frac{1}{n}\rho''(\bar{x},\bar{y}) \le \rho(\bar{x},\bar{y}) \le \rho''(\bar{x},\bar{y})$

Απόδειξη

(1η ανισότητα) : $\rho'(\bar{x},\bar{y}) \le \rho(\bar{x},\bar{y})$

$\to \rho(\bar{x},\bar{y}) = \sqrt{\rho_1^2(x_1,y_1)+\dots+\rho_n^2(x_n,y_n)}$

$\rho'(\bar{x},\bar{y}) = \max\{\rho_i(x_i,y_i),\ i=1,\dots,n\}$

Άρα: $\max\{\rho_i(x_i,y_i),\ i=1,\dots,n\} \le \sqrt{\rho_1^2(x_1,y_1)+\dots+\rho_n^2(x_n,y_n)}$

άρα ισχύει η πρώτη ανισότητα

Ο.δ.ο $\rho(\bar{x},\bar{y}) \le \sqrt{n}\cdot\rho'(\bar{x},\bar{y})$

$$\rho_i(x_i,y_i) \le \overset{\shortparallel}{\rho_{i_0}}(x_{i_0},y_{i_0})\sqrt{n} \quad ✓$$

$\underset{\shortparallel}{\rho(\bar{x},\bar{y})} \le \underset{\shortparallel}{\rho''(\bar{x},\bar{y})}$ ισχύει γιατί

$\sqrt{\sum \rho_i^2} \le (\sum \rho_i)$ φανερό!

η τελευταία: $\frac{1}{n}\rho''(\bar{x},\bar{y}) \le \rho(\bar{x},\bar{y}) \Leftrightarrow$

$\rho''(\bar{x},\bar{y}) \le n\,\rho(\bar{x},\bar{y}) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\rho_i(x_i,y_i) \le n\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\rho_i^2(x_i,y_i)}$ ισχύει!